

# Phénomènes de transport complexe à l'échelle des pores et modélisation de la rugosité

L. Hume<sup>a</sup>, P. Poncet<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*LMAP, UMR CNRS 5142, Bâtiment IPRA - UPPA, Avenue de l'Université - BP 1155, 64013 Pau*

---

*Keywords:* Méthodes hybrides grilles-particules, Interpolation, Rugosité, Pénalisation, Milieux poreux

---

Les techniques de calcul d'écoulements à l'échelle des pores sont actuellement l'objet de nombreuses études. Les modélisations numériques permettent d'étudier par exemple le transport d'espèces chimiques dans une roche poreuse, ou l'écoulement de fluides biologiques au sein du poumon. Cependant, les résolutions nécessaires à la bonne compréhension d'un écoulement en milieux poreux complexe sont souvent élevées. Nous exposerons des résultats permettant d'envisager à terme une montée en résolution des géométries, tout en utilisant des moyens de calcul modérés.

On se placera dans le cadre de l'utilisation de méthodes hybrides de type Euler-Lagrange [4, 5, 6], particulièrement adaptées au cas considéré. L'idée de ces méthodes est premièrement de calculer le champ de vitesse  $u$  du fluide sur une grille fixe de points, à l'intérieur du domaine d'étude  $\Omega$ . Ce champ est calculé à l'aide de l'équation de Stokes suivante :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

munie des conditions aux limites adéquates, où  $\mu$  désigne la viscosité du fluide (supposée ici constante). Une fois ce champ calculé, on étudie le transport de la quantité d'intérêt  $\alpha$  (par exemple, une concentration massique). Cette quantité est portée par des particules (indicées de 1 à  $N$ ), qui se déplacent librement dans le domaine. L'équation de transport-diffusion considérée est de la forme

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \cdot \nabla \alpha - \eta \Delta \alpha = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (2)$$

avec des conditions de bord pour  $\alpha$ , et où  $\eta$  désigne le coefficient de diffusion. Le principe des méthodes particulières repose sur une quadrature de  $\alpha$  par une solution mesure :

$$\alpha^h(t) = \sum_{p=1}^N \alpha_p(t) \delta_{x_p}(t) v_p(t), \quad (3)$$

où  $\alpha_p(t) \simeq \alpha(x_p(t), t)$ , et  $x_p(t)$  désigne les coordonnées de la particule  $p$  et  $v_p$  désigne son volume (qui est constant en temps). En dérivant temporellement les composantes du triplet  $(\alpha_p, x_p, v_p)$  pour chaque particule, on obtient le système dynamique suivant :

$$\dot{\alpha}_p = \eta[\tilde{\Delta}\alpha_h](x_p), \quad \dot{x}_p = u(x_p), \quad \dot{v}_p = v_p \operatorname{div} u = 0 \quad (4)$$

où  $\tilde{\Delta}$  est une quadrature lagrangienne du Laplacien. On a alors une solution ponctuelle  $\alpha_h$  exacte de (2) si  $\eta = 0$ , ce qui rend les méthodes particulières adaptées aux phénomènes où le transport est dominant.

Le transport de  $\alpha$  demande donc de transmettre les valeurs de  $u$  connues sur la grille vers le nuage de particules. De même, il est utile de connaître les valeurs de  $\alpha$  sur les points de grille à partir des données particulières (pour la visualisation par exemple). Ce type d'échange d'information se fait grâce à des techniques d'interpolation [8], qui sont le premier point abordé dans notre exposé. La mise en place de l'interpolation conditionne fortement le comportement des quantités physiques, le choix des noyaux est donc crucial. Nous aborderons en particulier le problème de conservation de signe: un noyau à valeurs

négatives peut en effet entraîner des incohérences physiques telles que des concentrations massiques négatives, ou des contre-courants parasites. Nous utiliserons des combinaisons des noyaux classiques, ainsi que des corrections de type Brackbill. La question de la conservation de la masse sera également posée.

Pour envisager le traitement de cas 3D réels, nous aborderons également la manière d'imposer des conditions aux limites adéquates pour le problème de Stokes, au niveau de l'interface fluide-solide du milieu poreux. Ces conditions peuvent permettre de modéliser une paroi rugueuse. On considère d'abord les domaines 2D suivants ( $F$ ,  $C$  et  $S$  sont des ouverts) :

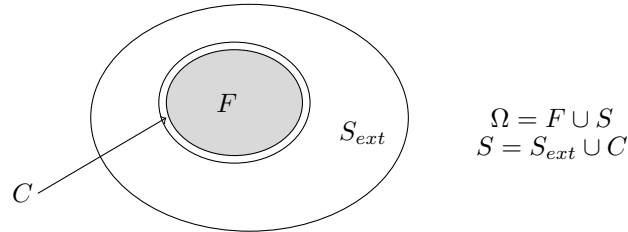


Figure 1: Domaines d'étude 2D

Le domaine  $F$  représente l'espace du pore où s'écoule le fluide,  $S$  représente le domaine solide et  $C$  représente une couronne incluse dans le solide, qui sera un domaine de pénalisation. On notera  $\Gamma$  la frontière  $\partial C \setminus \partial F$ , et on remarque que  $\partial\Omega = \partial S_{ext} \setminus \Gamma$ . En s'inspirant de [2], on s'intéresse à l'équation de Poisson pénalisée suivante, munie de conditions de Dirichlet homogènes :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u_\varepsilon + \frac{\mathbf{1}_C}{\varepsilon}u_\varepsilon = \mathbf{1}_C f \text{ dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

A l'aide de développements asymptotiques et sur un problème équivalent 1D, nous montrerons comment exhiber un coefficient de glissement  $\beta$  tel que la suite des solutions  $u_\varepsilon$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  converge vers la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u = f \text{ dans } F, \\ u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial F, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases}$$

On comparera également les méthodes substituables à la pénalisation et les différentes techniques de pénalisation possibles, certaines étant compatibles avec l'utilisation de grandes masses de données géométriques et d'autres pas.

## References

- [1] Angot, P. and Carbou, G. and Péron, V., Asymptotic study for Stokes-Brinkman model with jump embedded transmission conditions, *Asymptotic Analysis*, 25 (2015).
- [2] Carbou, G., Brinkmann model and double penalization method for the flow around a porous thin layer, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 10, 126-158 (2008).
- [3] Carbou, G., Penalization method for viscous incompressible flow around a porous thin layer, *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 5, 815-855 (2004).
- [4] Chatelin, R. and Poncet, P., A particle method for moving bodies in a 3D Stokes flow with variable viscosity, *SIAM Journal of Scientific Computing*, 35(4), B925-B949 (2013).
- [5] Cottet, G.-H. and Poncet, P., Advances in direct numerical simulations of 3D wall-bounded flows by Vortex-in-Cell methods, *Journal of Computational Physics*, 193, 136-158 (2004).
- [6] El Ossmani, M. and Poncet, P., Efficiency of multiscale hybrid grid-particle vortex methods, *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 8(5), 1671-1690 (2010).
- [7] Monaghan, J. J., Smoothed particle hydrodynamics, *Reports on Progress in Physics*, 68, 1703-1759 (2005).
- [8] Monaghan, J. J., Extrapolating B-Splines for interpolation, *Journal of Computational Physics*, 60, 253-262 (1985).